

# Aufgabenblätter zur Klausur

Robotik I: Einführung in die Robotik

am 12. Juli 2023

- Beschriften Sie bitte gleich zu Beginn jedes Lösungsblatt deutlich lesbar mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.
- Diese Aufgabenblätter werden nicht abgegeben. Tragen Sie Ihre Lösung deshalb ausschließlich in die für jede Aufgabe vorgesehenen Bereiche der Lösungsblätter ein. Lösungen auf separat abgegebenen Blättern werden nicht gewertet.
- Außer Schreibmaterial sind während der Klausur keine Hilfsmittel zugelassen. Täuschungsversuche durch Verwendung unzulässiger Hilfsmittel führen unmittelbar zum Ausschluss von der Klausur und zur Note „nicht bestanden“.
- Soweit in der Aufgabenstellung nichts anderes angegeben ist, tragen Sie in die Lösungsblätter bitte nur die Endergebnisse ein. Die Rückseiten der Aufgabenblätter können Sie als Konzeptpapier verwenden. Weiteres Konzeptpapier können Sie auf Anfrage während der Klausur erhalten.
- Halten Sie Begründungen oder Erklärungen bitte so kurz wie möglich. (Der auf den Lösungsblättern für eine Aufgabe vorgesehene Platz steht übrigens in keinem Zusammenhang mit dem Umfang einer korrekten Lösung!)
- Die Gesamtpunktzahl beträgt 45 Punkte.

*Viel Erfolg und viel Glück!*

**Aufgabe 1** *Mathematik*

(8 Punkte)

Gegeben sei die Quaternion  $\mathbf{q} = (-0.7, 0.0, 0.7, 0.0)$ .

1. Die Quaternion  $\mathbf{q}$  beschreibt eine Rotation um den Winkel  $\theta$  um die Rotationsachse  $\mathbf{u}$ . Bestimmen Sie ein mögliches Paar  $(\mathbf{u}, \theta)$  für die gegebene Quaternion  $\mathbf{q}$ . 2 P.

**Hinweis:**  $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \approx 0.7$

2. Eine Rotation in 3D kann auch durch eine Rotationsmatrix  $\mathbf{R} \in \text{SO}(3) \subset \mathbb{R}^{3 \times 3}$  dargestellt werden. Berechnen Sie die Rotationsmatrix, welche die gleiche Rotation wie  $\mathbf{q}$  beschreibt. Geben Sie Ihren Rechenweg an. 2 P.

3. Welche zwei Bedingungen muss eine Matrix  $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  erfüllen, um eine gültige Rotationsmatrix zu sein? Verwenden Sie diese beiden Bedingungen, um zu überprüfen, ob die aus Teilaufgabe 2. erhaltene Rotationsmatrix eine gültige Rotationsmatrix ist. Geben Sie Ihren Rechenweg an. 2 P.

**Hinweis:** Falls Sie keine Antwort auf Teilaufgabe 2. haben, verwenden Sie stattdessen die folgende Matrix:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

4. Zur Interpolation von Quaternionen wird SLERP (*Spherical Linear Interpolation*) eingesetzt. Was ist der Vorteil gegenüber linearer Interpolation und welche Probleme können bei SLERP auftreten? 1 P.

5. Ist die Darstellung mittels Eulerwinkeln im Vergleich zur Darstellung mittels Quaternionen besser in Bezug auf die Interpolation zwischen zwei Orientierungen? Begründen Sie ihre Antwort. 1 P.

**Aufgabe 2** *Kinematik*

(8 Punkte)

Gegeben ist ein Roboter mit dem Konfigurationsraum  $C \subseteq \mathbb{R}^3$  und dem Arbeitsraum  $W \subseteq \mathbb{R}^2$ . Dabei wird nur die Position des Endeffektors berücksichtigt. Der Roboter besteht aus einem Translationsgelenk  $d_1$ , einem Rotationsgelenk  $\theta_2$ , und einem weiteren Translationsgelenk  $d_3$ . Eine Konfiguration wird durch  $\boldsymbol{\theta} = (d_1, \theta_2, d_3)^\top \in C$  beschrieben. Die Jacobi-Matrix  $\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta})$  des Roboters ist gegeben durch:

$$\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} \frac{\delta f}{\delta d_1} & \frac{\delta f}{\delta \theta_2} & \frac{\delta f}{\delta d_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -(d_3 + 1) \cdot \sin(\theta_2) & \cos(\theta_2) \\ 0 & -(d_3 + 1) \cdot \cos(\theta_2) & \sin(\theta_2) \end{pmatrix}$$

1. Berechnen Sie die Jacobi-Matrix  $\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta})$  an der Konfiguration 1 P.

$$\boldsymbol{\theta}^* = (d_1, \theta_2, d_3)^\top = (5, -180^\circ, 1)^\top \in C.$$

2. Begründen Sie, warum die Verwendung der Moore-Penrose Pseudoinverse zur Berechnung der inversen Kinematik des Roboters notwendig ist. 1 P.

3. Geben Sie die Formel für die Berechnung der Moore-Penrose Pseudoinverse  $\mathbf{A}^+$  an. 1 P.

4. Berechnen Sie die Moore-Penrose Pseudoinverse  $\mathbf{J}^+(\boldsymbol{\theta})$  der Jacobi-Matrix  $\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta})$  an der Konfiguration  $\boldsymbol{\theta}^*$  aus Teilaufgabe 1. Geben Sie den Rechenweg an. 2 P.

5. Berechnen Sie die Gelenkgeschwindigkeit  $\dot{\boldsymbol{\theta}}$  an der Konfiguration  $\boldsymbol{\theta}^*$ , welche die Endeffektorgeschwindigkeit  $\dot{\mathbf{p}}$  realisiert. Geben Sie den Rechenweg an. 1 P.

$$\dot{\mathbf{p}} = (\dot{x}, \dot{y})^\top = (0.4, 0.2)^\top \in \mathbb{R}^2$$

6. Nennen Sie das Problem, welches bei der Berechnung der Moore-Penrose Pseudoinversen auftreten kann. Nennen Sie einen entsprechenden Lösungsansatz. 1 P.

7. Besteht das Problem aus Teilaufgabe 6. auch in der Konfiguration  $\boldsymbol{\theta}^*$ ? Begründen Sie Ihre Antwort kurz. 1 P.

### Aufgabe 3 *Bewegungsplanung*

(8 Punkte)

Ein punktförmiger Roboter soll mithilfe der Potentialfeldmethode einen kollisionsfreien Pfad vom Startpunkt  $\mathbf{p}_s \in \mathbb{R}^2$  zum Zielpunkt  $\mathbf{p}_g \in \mathbb{R}^2$  gemäß Abbildung 1 finden.

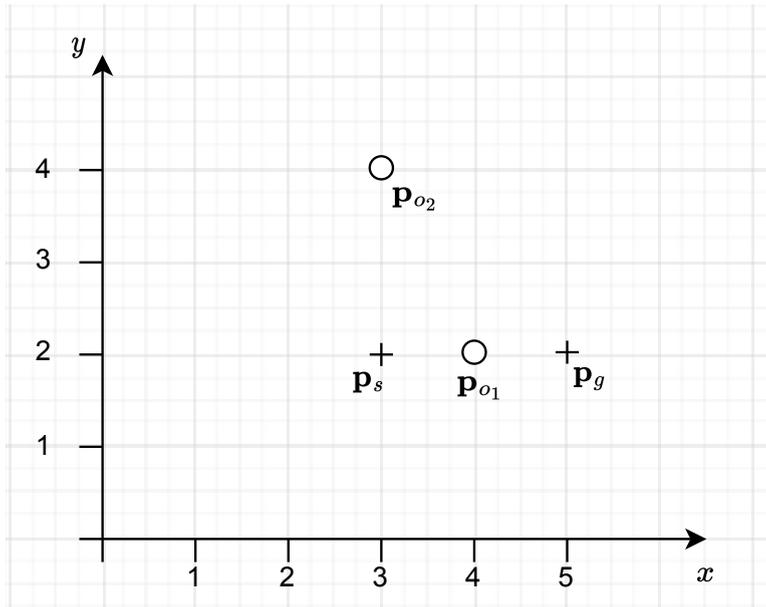


Abbildung 1: Bewegungsplanung mit Potentialfeldern

1. Das Potentialfeld an einem Punkt  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$  sei gegeben durch  $U(\mathbf{p})$ . Wie wird die Bewegung des Roboters in diesem Punkt generiert? 1 P.
2. Gegeben sind die folgenden Funktionen  $U_1(\mathbf{p})$  und  $U_2(\mathbf{p})$ . Geben Sie an, welche zur Erzeugung der Potentialfelder für (1) die punktförmigen Hindernisse  $\mathbf{p}_{o1}$  und  $\mathbf{p}_{o2}$  sowie (2) das Ziel  $\mathbf{p}_g$  geeignet ist. Begründen Sie Ihre Antwort. 2 P.

$$U_1(\mathbf{p}) = \|\mathbf{p} - \mathbf{p}_i\| \qquad U_2(\mathbf{p}) = \frac{1}{\|\mathbf{p} - \mathbf{p}_i\|} \qquad \mathbf{p}_i \in \{\mathbf{p}_{o1}, \mathbf{p}_{o2}, \mathbf{p}_g\}$$

3. Bestimmen Sie die Gesamtkraft, die – gemäß Teilaufgabe 2 – durch die Potentialfelder von  $\mathbf{p}_{o1}$ ,  $\mathbf{p}_{o2}$  und  $\mathbf{p}_g$  auf den Roboter im Punkt  $\mathbf{p}_s = (3, 2)^\top$  wirkt. Geben Sie hierzu die Einzelkräfte  $\mathbf{F}_{o1}$ ,  $\mathbf{F}_{o2}$  und  $\mathbf{F}_g$  als Teil des Lösungswegs an. 3.5 P.

**Hinweis:**  $\nabla U_1(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p} - \mathbf{p}_i}{\|\mathbf{p} - \mathbf{p}_i\|} \qquad \nabla U_2(\mathbf{p}) = -\frac{\mathbf{p} - \mathbf{p}_i}{(\|\mathbf{p} - \mathbf{p}_i\|)^3}$

4. Welches Problem kann bei der Potentialfeldmethode auftreten? Nennen Sie eine Maßnahme zur Lösung dieses Problems. 1.5 P.

### Aufgabe 4 Greifen

(8 Punkte)

1. Gegeben sei ein kraftgeschlossener Griff. Unter welcher Annahme kann der Griff beliebigen externen Wrenches widerstehen? 1 P.
2. Gegeben ist der planare Griff  $G = \{C_1, C_2\}$  in Abbildung 2 mit Kontaktkräften  $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$  an den Punkten  $\mathbf{d}_1 = (-2, 0)^\top$  und  $\mathbf{d}_2 = (2, 0)^\top$ . Gehen Sie im Folgenden von starren Punktkontakten **mit** Reibung, einem Reibungskoeffizienten von  $\mu = 1$  sowie Einheitskräften  $|\mathbf{f}_i| = 1$  aus.

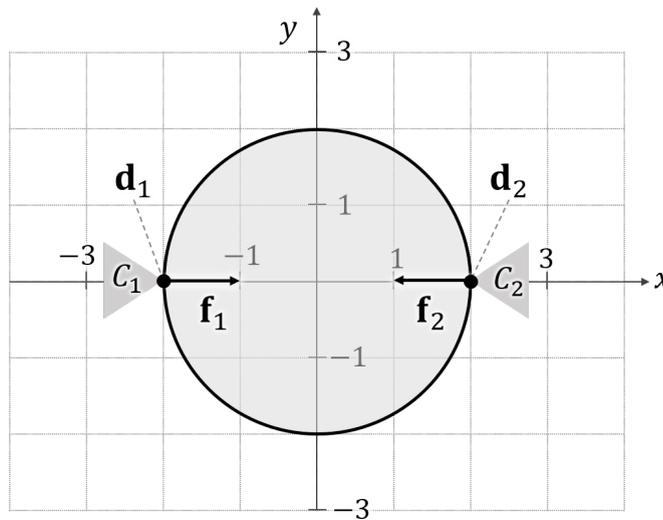


Abbildung 2: Planarer Griff  $G$

- (a) Berechnen Sie alle Wrenches  $\mathbf{w} = (f_x, f_y, \tau)^\top$ , die den Reibungskegel von **Kontaktpunkt**  $C_1$  (links im Bild) aufspannen. 2 P.  
**Hinweise:**  $\tan^{-1}(1) = 45^\circ$ ,  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = ad - bc$
  - (b) Ist der Griff  $G$  kraftgeschlossen? Begründen Sie Ihre Antwort. 1 P.
  - (c) Geben Sie *entweder* einen Griff mit der minimalen Anzahl von Kontakten an, die notwendig sind, um das kreisförmige Objekt in Abbildung 2 **formgeschlossen** zu greifen, *oder* begründen Sie, warum das nicht möglich ist. 2 P.
3. Welche Information über das Objekt liegt für die Greifsynthese vor im Falle von ...
    - (a) bekannten Objekten (*known objects*) 1 P.
    - (b) unbekanntem Objekten (*unknown objects*) 1 P.

**Aufgabe 5** *Bildverarbeitung* (8 Punkte)

1. Eine RGB-Kamera im Kopf eines humanoiden Roboters liefert Bilder mit einer Auflösung von  $1000 \times 800$  Pixeln. Jeder Kanal eines Pixels belegt 1 Byte.

(a) Berechnen Sie den Speicherbedarf eines einzelnen Bildes in Megabyte (MB). 1 P.

(b) Ist ein USB 2.0-Kabel mit einer Übertragungsrate von  $480 \frac{\text{Mbit}}{\text{s}}$  ausreichend, um Bilder von der Kamera mit 30 Bildern pro Sekunde zu übertragen? 1 P.

2. Gegeben ist ein Punkt  $\mathbf{p} = (50, 200, 100)^\top$  im Weltkoordinatensystem des Roboters.

(a) Geben Sie die Formel für die Bildkoordinaten des Punktes  $\mathbf{p}$  unter Verwendung des erweiterten Lochkameramodells mit Kalibriermatrix  $\mathbf{K}$  an. Berechnen Sie die Bildkoordinaten von  $\mathbf{p}$ . 1 P.

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 50 \\ 0 & 50 & 200 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Wie viele Korrespondenzen zwischen Weltpunkten und ihren Projektionen in die Bildebene werden mindestens benötigt, um die extrinsischen und intrinsischen Parameter der Kamera zu bestimmen? Welche Art von Objekt wird oft für eine solche Kalibrierung verwendet? 2 P.

3. Nennen und erklären Sie vier mögliche Padding-Verfahren zum Erhalt der Größe des ursprünglichen Bildes bei der Anwendung von Filteroperationen. 2 P.

4. Beschreiben Sie die Vorgehensweise der Kantenverfolgung mit Hysterese, die beim Canny-Kantendetektor verwendet wird. 1 P.

**Aufgabe 6**    *Roboterprogrammierung*

(5 Punkte)

1. Was sind die vier wichtigsten Merkmale des Harel-Statechart-Formalismus? 2 P.
2. Was ist ein Grund, der für das Programmieren durch Vormachen (PdV) spricht? 1 P.
3. In der Vorlesung wurde ein hierarchisches Verfahren zur Segmentierung menschlicher Demonstrationen vorgestellt. Benennen Sie die beiden Level und erklären Sie, auf jeweils welcher Basis die Segmentierung erfolgt. 2 P.

# Lösungsblätter zur Klausur

Robotik I: Einführung in die Robotik

am 12. Juli 2023

Name:	Vorname:	Matrikelnummer:
-------	----------	-----------------

Aufgabe 1	von 8 Punkten
Aufgabe 2	von 8 Punkten
Aufgabe 3	von 8 Punkten
Aufgabe 4	von 8 Punkten
Aufgabe 5	von 8 Punkten
Aufgabe 6	von 5 Punkten

<b>Gesamtpunktzahl:</b>	
-------------------------	--

	<b>Note:</b>
--	--------------

Name:

Vorname:

Matr.-Nr.:

2

## Aufgabe 1 *Mathematik*

1. Winkel  $\theta$  und Rotationsachse  $\mathbf{u}$ :

2. Rotationsmatrix:

Name:

Vorname:

Matr.-Nr.:

3

3. Bedingungen:

- 

- 

Überprüfung:

- 

- 

4. • Vorteil:

- Probleme:

5. Eulerwinkel and Quaternion:

Name:

Vorname:

Matr.-Nr.:

4

## Aufgabe 2 *Kinematik*

1. Jacobi-Matrix:

2. Begründung:

3. Formel:

4. Pseudoinverse:

Name:

Vorname:

Matr.-Nr.:

5

5. Gelenkgeschwindigkeit:

6. Problem:

Lösungsansatz:

7. Antwort

Begründung:

## Aufgabe 3 *Bewegungsplanung*

1. Potentialfeldmethode:

2. Wahl  $U_1$  und  $U_2$ :

3. Kraft in Punkt  $\mathbf{p}_s = (3, 2)^\top$ :

- $\mathbf{F}_{o_1}$

Name:

Vorname:

Matr.-Nr.:

7

- $F_{O_2}$

- $F_g$

- Gesamtkraft:

4. • Problem:

- Maßnahme:

Name:

Vorname:

Matr.-Nr.:

8

## Aufgabe 4 *Greifen*

1. Annahme:

2. Griff:

(a) Wrenches:

Name:

Vorname:

Matr.-Nr.:

9

(b) Antwort und Begründung:

(c) Griff oder Begründung:

3. Information:

(a)

(b)

## Aufgabe 5 *Bildverarbeitung*

### 1. Bildrepräsentation

(a) Speicherbedarf eines Bildes in Megabyte (MB):

(b) Ist USB 2.0 ausreichend zur Datenübertragung?

### 2. Lochkameramodell

(a) Bildkoordinaten des Punktes:

(b) Kamerakalibrierung:

### 3. Padding-Verfahren:

- 
- 
- 
- 

### 4. Kantenverfolgung mit Hysterese:

## Aufgabe 6 *Roboterprogrammierung*

1. Merkmale:

- 

- 

- 

- 

2. Grund:

3. Benennung und Erklärung:

- 

-